小学生の引き算・繰り下がり / 桁上がりと cohomology
cohomology を教えて下さい

★この記事は Math Advent Calendar 2020 の 23 日目の記事です。★

本記事は、

1. 小学校低学年の引き算でうちの子供の「発見」=「引き算のことは引き算でせよ?」
2. 私は何故、コホモロジーを勉強したいか、使えるようになりたいか?
3. 小学校算数の繰り上がりをコホモロジー的観点から分析する、ある論文の紹介を試みる。

という構成になっています。1.は前座で、本命というか中心は 2.です。私にはコホモロジーが全然わかっていないので、3.については、紹介と言っても少しだけ、疑問・質問ばかりになりました。

1. 小学校低学年の引き算でうちの子供の「発見」=「引き算のことは引き算でせよ?」

これは既にこちらで述べたことでもあるのですが、私の小学 2 年生の子供が算数の宿題で、引き算をやっていた時のこと、

14 – 8 を求める時、私は子供が 1 年生の時から、
10 – 8 = 2
14 – 10 = 4
6 + 2 = 6
答え 6 と言うように引き算をするのに足し算も使っていました。

ある時、子供が
14 – 10 = 4
8 – 4 = 4
10 – 4 = 6
というように引き算だけで、答えを出すというようなことを言ったので、ちょっと感心したのでした。

「微分のことは微分でせよ」をもじって、

「引き算のことは引き算でせよ?」

というような話を先のリンクのマイクロブログの記事に書きました。

子供はその後、小学 2 年生の 2 学期に入り、九九の練習ばかりしているうち、簡単な足し算や引き算も忘れてしまったようで、引き算の方法を「発見する」? というような才覚はみられなくなりました。まあ、そんなものでしょう。

2. 私は何故、コホモロジーを勉強したいか、使えるようになりたいか?

さて、子供の引き算の「発見」より前に読みかけていた、**算数の繰り上がりをコホモロジーの観点から分析する論文**のことが思い出され、マイクロブログにも書こうと思っていたのですが、コホモロジーのことを全く分かっていない私には説明できず、たまたま Math Advent Calendar に「算数でもかまいません」とあったので、書いてみようとしたのが、この記事です。

私は理系ではありますが、数学や物理の方面ではなく、大学の教養の数学でもコホモロジーという言葉は出てこず、全く知りませんでした。何故、コホモロジーに関心があるのか、少し、説明させて下さい。

私の専門は生物学で、当時から現在に至るまでの生物学の進歩、特に分子生物学的・分子遺伝学的な手法の発達とゲノム解析、それらの結果としての大量のデータの解析の必要性には圧倒されるばかりでした。次々と「事実」が蓄積されてはいくものの、大量の「事実」はますます複雑で、羅列になるばかりで,

理解し体系化することは極めて困難であるように思えました。「理論生物学」や「システム生物学」なども注目されるようになりました。

当時、「生物学は新しい数学待ちだ」というようなことが言われていて、数学の力を借りて、生物学を体系化しようという考えがありました。例えば、昔、東京大学の物理学教室や国立遺伝学研究所におられた、ショウジョウバエで有名な堀田凱樹教授がいろいろと発言・文章などをインターネットに残していらっしゃったのですが、メモしてあった URL をいま探すと文章が見つけられなくなってしまったものがほとんどでした。「新しい数学待ち」という言葉は見つからなかったのですが、同様の趣旨のものとしては、

> 私はなぜ統合データベースを立ち上げたのか～ 2050年に向けて堀田凱樹（情報・システム研究機構長）(PDF)

が現在でもアクセスすることができました。堀田先生がときどき書かれていた、

> 「数理の応用ではなく、数理思考法の導入」

というのが印象に残りました。

さて、私も数学と生物とを結び付けたいと思い、いろいろと見回っていたのですが、あるとき、

> 21 世紀の新技術と現代数学ー大局を扱う理論と技術ー「多様体論」と「コホモロジー論」（文責）遊佐 毅

が見つかりました。そのころ私は、Universal Darwinism 的あるいは 群知能 的な「個々ではなく、集団としての細胞の機能」のようなことを考えていたので、遊佐先生のおっしゃる、

> **「局所から大局へ」**
>
> 「**バラバラにしてしまうと意味がなく、組織体にして初めて意味が生じるような**（非常に困難な）問題」を 扱う分野

のような、キーワードに強く惹きつけられ、コホモロジーという言葉が比較的に検索し易いこともあって、いろいろと調べたりしました。しかし、遊佐先生が記されているように、コホモロジーは難しく、ほとんど分からないまま、いまに至っています。特に、

> コホモロジーには非常にたくさんの種類があったりするので、どこから勉強すればよいのか分かりにくい。
>
> 自分の関心のある「世界」なり「問題」にどのように結びつけていけばよいのか分からない。
>
> コホモロジーと結びつけることで、どのような「ご利益」があるのか？
>
> できるだけ簡単な例題で考えたい。

と感じました。

借りて読もうとした本としては、加藤五郎先生の「コホモロジーのこころ」がありますが、最初の方で読み進まなくなりました。どうしても、実際の細胞集団のようなことと結びつけようと考えると、うまく読めなくなってしまいます。

★★じゃんけん 神話や婚姻の群論的構造にコホモロジー的な解析は可能なのか？

3. 小学校算数の繰り上がりをコホモロジー的観点から分析する、ある論文の紹介を試みる。

ということで、とりあえず、論文の紹介を試みます。

> A Cohomological Viewpoint on Elementary School Arithmetic
> Daniel C. Isaksen
> The American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 9. (Nov., 2002), pp. 796-805
> https://www.jstor.org/stable/3072368?seq=1

JSTOR に登録すれば無料で読むことができます。

読んだ時の感想としては、群の拡大 や 商群 さらにトポロジーの用語としての cocycles と coboundaries が理解できていないので、読み進めなくなりました。
アーベル群が土台になっているようですが、現実の仮題・問題や現象がアーベル群に乗せることができるかどうか？

ご意見やアドバイスなどをいただければ幸いです。
sumiyaki : 分散 SNS
edacsac : Twitter 最近ほとんど使っていませんが、通知があれば分かると思います。
smykcj : Reddit 登録しただけですが、通知があれば分かると思います。

以下は論文を読み進めた時のメモのようなもの。

1. Iintroduction
群コホモロジーのもっとも初歩的な紹介。
homomorphisms and quotient groups のような有限群論の知識があればよい。

2. Carrying is a cocycles.
準備
Finite abelian group $\mathbb{Z}_{100}$ (0 , 1, 2, …, 99)
$\mathscr{T}$ ($\mathbb{Z}_{10}$ = 0, 10, 20, …, 90; tens)
$\mathscr{O}$ (別の$\mathbb{Z}_{10}$ = 0, 1, 2, …, 9; ones) これは quotient group $\mathbb{Z}_{100} / \mathscr{T}$ of $\mathbb{Z}_{100}$ になっている。
繰り上がりの表が出てくる。

[a][b] という表記法を定義している。ここで、$a \in \mathscr{T}$, $b \in \mathscr{O}$
[5][3] は 53 のこと。
ここでそれぞれの群で加法つまり足し算をやってみると、

$$[5][3] + [1][8] = [6][1]$$

となってしまう。繰り上がりを忘れているから。
そこで、くりあがりのための関数 $z(b_1, b_2)$ が必要になる。

$$[a_1][b_1] + [a_2][b_2] \text{ は } [a_1+a_2 + z(b_1, b_2)][b_1+b_2]$$

になる。

$$[5][3] + [1][8] = [6+z(3,8)][1] = [7][1]$$

次に結合則を考える。

$$([a_1][b_1] + [a_2][b_2]) + [a_3][b_3] = [a_1][b_1] + ([a_2][b_2] + [a_3][b_3])$$

ここで、十の位だけ取り出してみると、

$$(a_1 + a_2 + z(b_1, b_2)) + a_3 + z(b_1+b_2, b_3) = a_1 + z(b_1, b_2+b_3) + (a_2 + a_3) + z(b_2, b_3)$$

が成立し、さらに、

$$z(b_1, b_2) + z(b_1+b_2, b_3) = z(b_1, b_2+b_3) + z(b_2, b_3)$$

となり、

$$z(b_2, b_3) - z(b_1+b_2, b_3) + z(b_1, b_2+b_3) - z(b_1, b_2) = 0 \qquad (\text{式 } 2.1)$$

になる。
この式は **cocycle condition** として知られる。

また、全ての $b \in \mathscr{O}$ について

$$z(b,0) = 0 = z(0,b) \qquad (\text{式 } 2.2)$$

が成り立ち、この式は **normalization condition** と呼ばれる。

ここで
定義2.1: 関数 z: $\mathscr{O} \times \mathscr{O} \to \mathscr{T}$ がもし cocycle condition と normalization condition を満たすならば、z は cocycle である。
つまり、繰り上がりの z は cocycle の一種である。

3. Other groups of order 100.

普通の繰り上がりとは別の関数 z や $\mathscr{T}$, $\mathscr{O}$ を考えてみることができる。
通常の繰り上がりを 2 倍にした 2z という繰り上がり関数を考えると、それでもいままでの議論は同様にできる。この 2z を使う 100 までの数の作るアーベル群は$\mathbb{Z}_{100}$, $\mathbb{Z}_{50} \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{50}$, $\mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10}$ などと isomorphic である、などと書かれている。なんだか分からない。

4. General cocycles.

定義4.1:An extension of the group $\mathscr{O}$ by the group $\mathscr{T}$ is an abelian group E such that $\mathscr{T}$ is a subgroup of E and the quotient group $E / \mathscr{T}$ is $\mathscr{O}$.
この定義はなんのことか分からない。どうも 群の拡大 に関係がありそう。

Extension E of $\mathscr{O}$ by $\mathscr{T}$を考える。(すでに分からない)

補題4.2: E の全ての要素は [a][b]という形に一意に書くことができる。

定義4.3: ある extension E of $\mathscr{O}$ by $\mathscr{T}$ について、
function z **:** $\mathscr{O}$ **x** $\mathscr{O} \to \mathscr{T}$ がもし、

$$[0][b_1] + [0]b_2] = [z(b_1,b_2)][b_1 + b_2]$$

を満たすならば **associated cocycle** と呼ばれる(随伴コサイクル?)

E から cocycle z が生みだされ、cocycle z で E が規定される、というような話?

命題4.4 : z **:** $\mathscr{O}$ **x** $\mathscr{O} \to \mathscr{T}$ が cocycle ならば、[a][b]の形式($a \in \mathscr{T}$, $b \in \mathscr{O}$)は次の加法のもと、abelian group となる。

$$[a_1][b_1] + [a_2][b_2] = [a_1 + a_2 + z(b_1,b_2)][b_1 + b_2]$$

5. Coboundaries.

Cocycle z と E との関係は一対一とは限らない。

定義5.1
A group homomorphism $\phi : E \to E'$ of extensions is an *isomorphism of extensions* if ϕ restricts to the identity map on $\mathscr{T}$ and the induced map on quotients $\overline{\phi} : \mathscr{O} \to \mathscr{O}$ is the identity map on $\mathscr{O}$.
これ分からない。

命題5.2 (省略)

定義 5.3 関数 h: $\mathscr{O} \to \mathscr{T}$ で $h(0) = 0$ のような与えられた h に対して、
coboundary of h として δh を定義する、
δh: $\mathscr{O}$ **x** $\mathscr{O} \to \mathscr{T}$ で、

$$\delta h(b_1, b_2) = h(b_2) - h(b_1 + b_2) + h(b_1)$$

Cocycles と coboundaries の用語はもともとトポロジーの用語。
Singular cohomology of a space X 云々の話は特異ホモロジー 辺りが理解できれば良いのだろうが、分からないことがさらに増える？ 代数幾何学的な入り口から入ったほうが良いのか？

6. Cohomology
定義 6.1 $Z(\mathscr{O}; \mathscr{T})$は cocycles の集合と定義する。
定義 6.2 $B(\mathscr{O}; \mathscr{T})$は boundaries の集合と定義する。
補題 6.3 $Z(\mathscr{O}; \mathscr{T})$と $B(\mathscr{O}; \mathscr{T})$は abelian group になる。
補題 6.4 $B(\mathscr{O}; \mathscr{T})$は $Z(\mathscr{O}; \mathscr{T})$の部分群になる。

定義 6.5 cohomology $H(\mathscr{O}; \mathscr{T})$を次の商群で定義する。

$$H(\mathscr{O};\mathscr{T})=\frac{Z(\mathscr{O};\mathscr{T})}{B(\mathscr{O};\mathscr{T})}$$

ようやく cohomology が出てきたけれども、前提となる部分で分かっていないことが多いし、時間もなくなってきたので、とりあえず、ここまで、ということに。